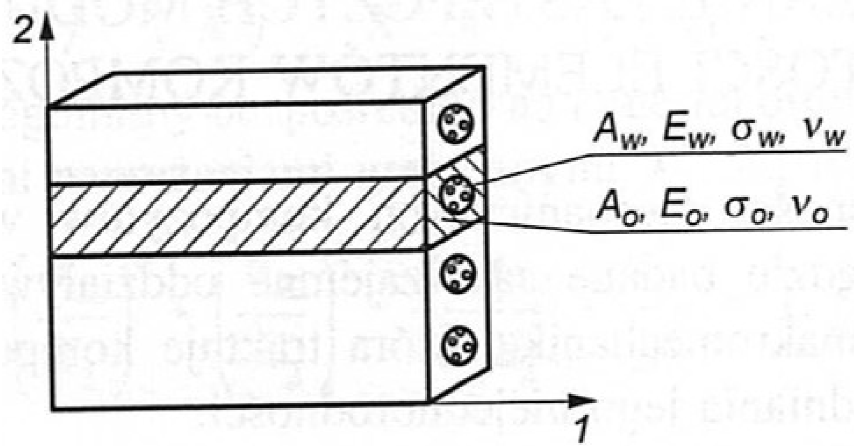
Homogenizacja

W opisie właściwości mechanicznych kompozytów wyróżniamy niekiedy mikromechanikę, gdzie badane są wzajemne oddziaływania poszczególnych składników oraz makromechanikę, która traktuje kompozyt jako nowe tworzywo, bez uwzględniania jego niejednorodności . Przejście od złożonego modelu niejednorodnego do modelu jednorodnego z zastępczymi własnościami materiałowymi nazywane jest <u>homogenizacją.</u>

W ramach analizy makromechanicznej określane są uśrednione pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Uśrednione własności kompozytu mogą być wyznaczone na drodze eksperymentalnej lub też wyliczone za pomocą procedur analitycznych albo symulacji komputerowej. Ilustracją takich procedur może być przybliżone wyznaczanie zastępczych modułów sprężystości dla warstwy ortotropowej, zbrojonej jednokierunkowo włóknem długim, ciągłym.

W celu przeprowadzenia procedury wyznaczenia właściwości materiałowych potrzebne jest wyodrębnienie fragmentu reprezentatywnego dla periodycznej struktury warstwy.



A_w – pole przekroju poprzecznego włókien w elemencie reprezentatywnym,

A_0 – pole przekroju poprzecznego osnowy,

$A = A_0 + A_w$ – pole przekroju całego elementu,

E_w, G_w, ν_w – stałe sprężystości materiału włókna,

E_0, G_0, ν_0 – stałe sprężystości materiału osnowy,

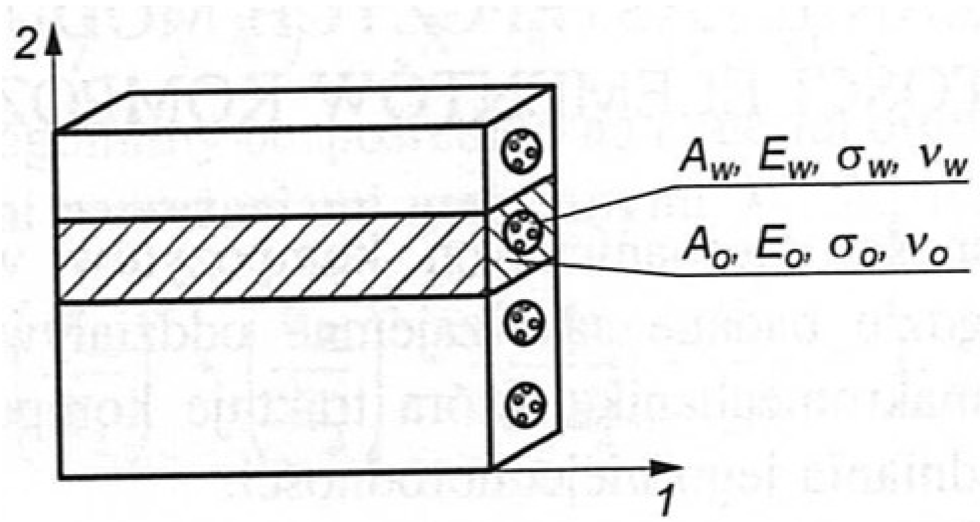
$E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, G_{12}$ – uśrednione stałe sprężystości warstwy ortotropowej.

$V_w = \frac{A_w}{A}$ - udział objętościowy włókna w kompozycie (objętościowy stopień zbrojenia

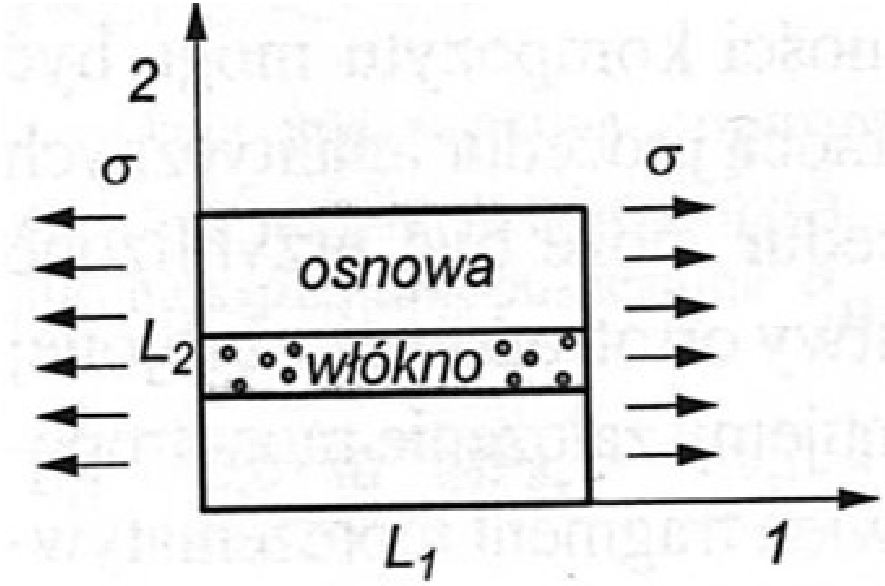
$V_o = \frac{A_o}{A}$ - udział objętościowy spoiwa

Do pełnego opisu kompozytu włóknistego są potrzebne następujące parametry:

- rodzaj włókna,
- rodzaj użytej tkaniany,
- gramatura tkaniany,
- rodzaj spoiwa,
- objętościowy/masowy stopień zbrojenia.



W celu znalezienia zastępczego modułu E_{11} rozpatrzmy rozciąganie analizowanego elementu naprężeniem σ w kierunku 1 (włókien).



Przyjmijmy, że odkształcenia spoiwa i włókien są takie same:

$$\varepsilon_{1w} = \varepsilon_{10} = \varepsilon_{11} = \text{const}$$

Siła F przenoszona przez analizowany fragment jest równa sumie sił przenoszonych przez włókna i spoiwo:

$$F = \sigma \cdot A = \sigma_{1w} \cdot A_w + \sigma_{10} \cdot A_0$$

czyli

$$\varepsilon_{11} \cdot E_{11} \cdot A = E_w \cdot \varepsilon_{11} \cdot A_w + E_0 \cdot \varepsilon_{11} \cdot A_0$$

Po podzieleniu ostatniego równania przez $\varepsilon_{11} A$ otrzymujemy <u>wartość zastępczego modułu Younga w kierunku włókna</u>:

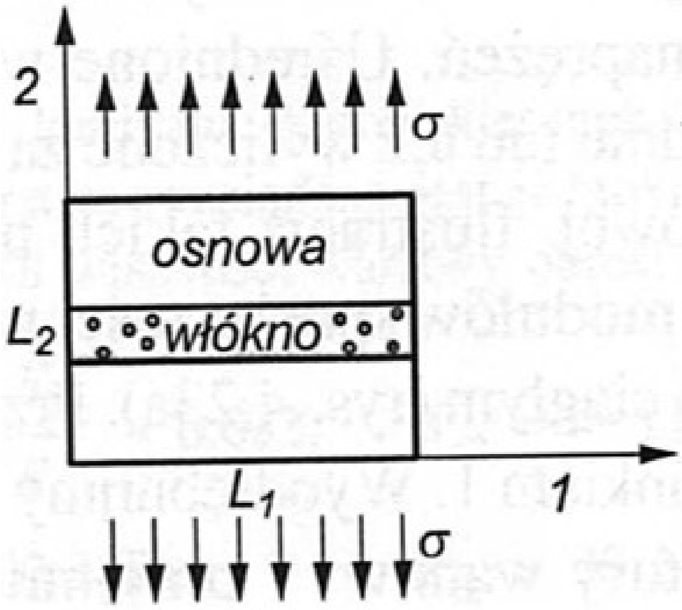
$$E_{11} = E_w \cdot V_w + E_0 \cdot V_0$$

gdzie

$$V_w = \frac{A_w}{A}, \qquad V_0 = \frac{A_0}{A}$$

oznaczają udziały objętościowe włókna i osnowy w strukturze kompozytu.

Moduł E_{22} możemy przewidywać analizując rozciąganie wybranego elementu w kierunku 2 (poprzecznym do włókien).



Wydłużanie ΔL_2 w kierunku 2 może być oszacowane przez wyrażenie:

$$\Delta L_2 = \varepsilon_w \cdot V_w \cdot L_2 + \varepsilon_0 \cdot V_0 \cdot L_2$$

Przyjmując, że naprężenie σ działające w kierunku 2 jest stałe (warunek równowagi) mamy:

$$\varepsilon_w = \frac{\sigma}{E_w}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0}$$

Stąd

$$\frac{\Delta L_2}{L_2} = V_w \frac{\sigma}{E_w} + V_0 \frac{\sigma}{E_0}$$

Czyli średnie odkształcenie w kierunku 2 jest równe:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma}{E_{22}} = V_w \frac{\sigma}{E_w} + V_o \frac{\sigma}{E_o}$$

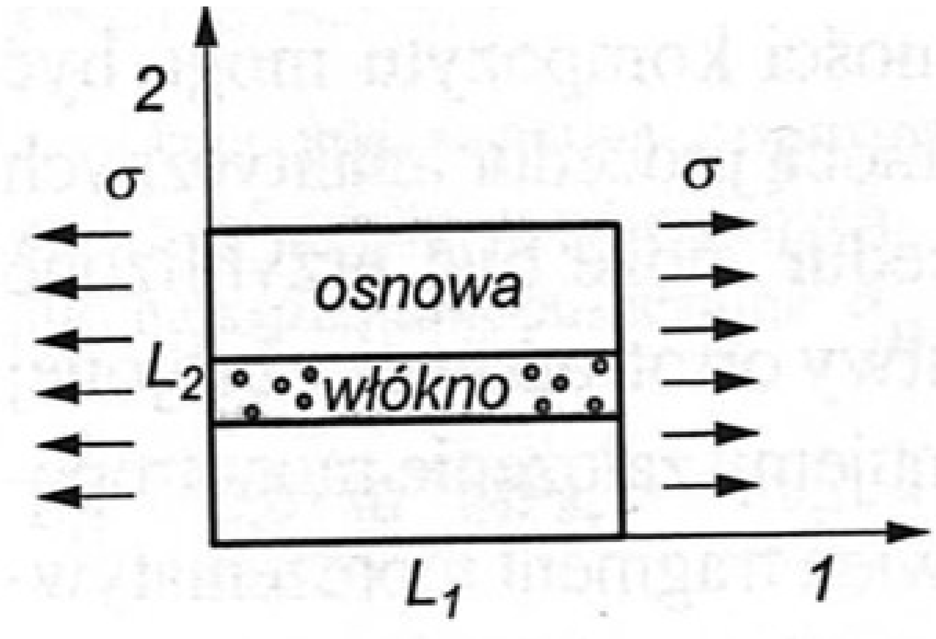
Po obustronnym podzieleniu przez σ mamy:

$$\frac{1}{E_{22}} = V_w \frac{1}{E_w} + V_0 \frac{1}{E_0}$$

i w rezultacie wzór na <u>zastępczy moduł Younga w kierunku poprzecznym</u> ma postać:

$$E_{22} = \frac{E_w \cdot E_o}{V_w E_o + V_o E_w}$$

Zastępczą wartość stałej Poissona ν_{12} wyznaczymy rozpatrując rozciąganie o kierunku 1.



Zmiana wymiaru L_2 elementu jest wtedy równa:

$$\Delta L_2 = L_2 \cdot \varepsilon_{22} = -L_2 \nu_{12} \cdot \varepsilon_{11}$$

Z drugiej strony ΔL_2 wynika ze skrócenia części odpowiadającej włóknu i osnowie:

$$\Delta L_2 = -v_0 \cdot \varepsilon_{11} \cdot V_0 \cdot L_2 - v_w \cdot \varepsilon_{11} \cdot V_w \cdot L_2$$

Porównując prawe strony równań:

$$-L_2 v_{12} \varepsilon_{11} = -v_o \varepsilon_{11} V_o L_2 - v_w \varepsilon_{11} V_w L_2$$

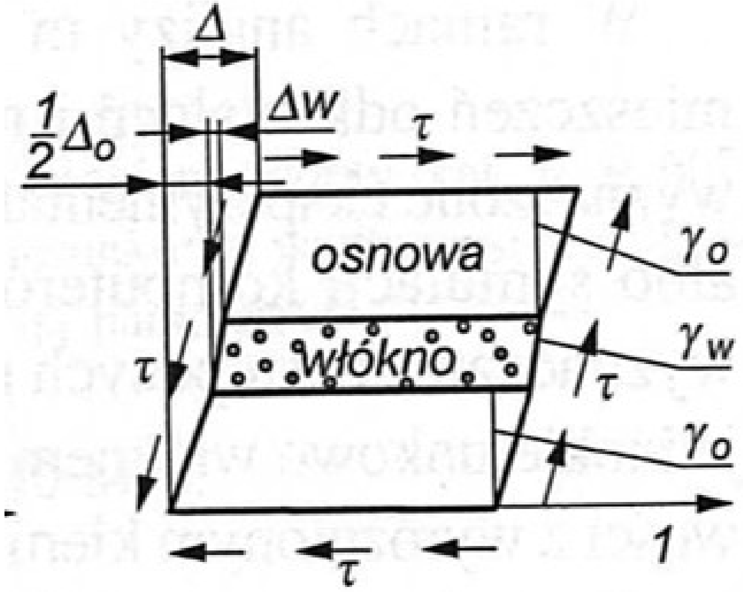
Otrzymamy <u>zastępczą wartość stałej Poissona:</u>

$$v_{12} = v_0 \cdot V_0 + v_w \cdot V_w$$

Wartość v_{21} można wyznaczyć z zależności

$$\frac{v_{21}}{E_{22}} = \frac{v_{12}}{E_{11}}$$

W celu wyznaczenia modułu G_{12} rozpatrzmy ścinanie reprezentatywnego elementu zakładając, że naprężenia ścinające są takie same we włóknach i spoiwie.



Mamy wówczas:

$$\gamma_0 = \frac{\tau}{G_0}, \qquad \gamma_w = \frac{\tau}{G_w}$$

średni kąt deformacji jest wtedy równy:

$$\gamma = \frac{\Delta}{L_2} = \frac{\tau}{G_{12}}$$

Korzystamy ze związku

$$\Delta = \Delta_w + \Delta_0$$

$$tg\gamma = \frac{\Delta}{L_2} \approx \gamma \rightarrow \ \Delta = \gamma L_2$$

$$\gamma L_2 = \Delta$$

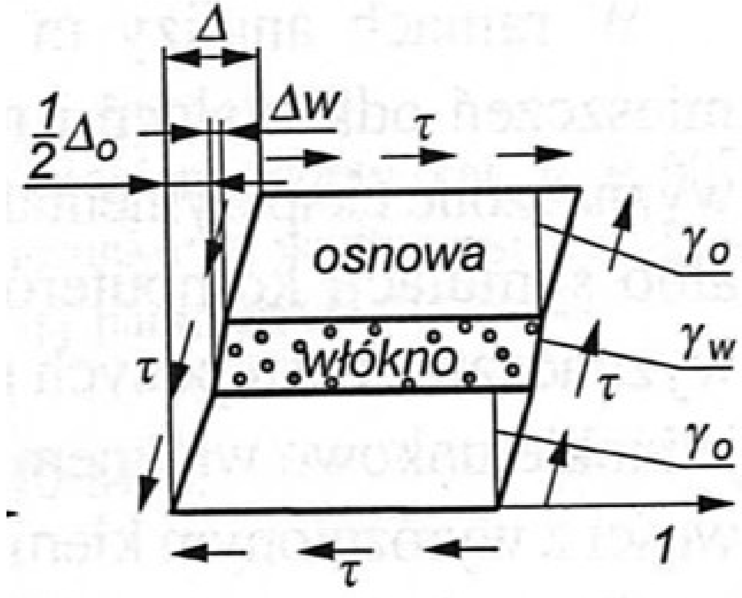
$$\gamma L_2 = \Delta_w + \Delta_o$$

$$\gamma L_2 = L_w \gamma_w + L_o \gamma_o$$

$$\gamma L_2 = L_2 \frac{L_w}{L_2} \gamma_w + L_2 \frac{L_o}{L_2} \gamma_o$$

$$\gamma = V_w \gamma_w + V_o \gamma_o$$

$$\frac{\tau}{G_{12}} = V_w \frac{\tau}{G_w} + V_o \frac{\tau}{G_o}$$



Stąd zastępczy moduł sprężystości poprzecznej wynosi:

$$G_{12} = \frac{G_w \cdot G_o}{V_w G_o + V_o G_w}$$

ZADANIE

Wyznaczyć zastępcze właściwości materiałowe kompozytu.

Dane:

Włókno szklane typ E - E_w = 73,5 [GPa], ν_w = 0,22

Spoiwo epoksydowe – E_o = 3,4 [GPa], ν_o = 0,35

V_w = 50%

Rozwiązanie

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow \; G_w = \frac{73{,}5}{2 \cdot 1{,}22} = 30[GPa]; \; G_o = \frac{3{,}4}{2 \cdot 1{,}35} = 1{,}3[GPa]$$

$$E_{11} = E_w V_w + E_o V_o = 73{,}5 \cdot 0{,}5 + 3{,}4 \cdot 0{,}5 = 38{,}5\ [GPa]$$

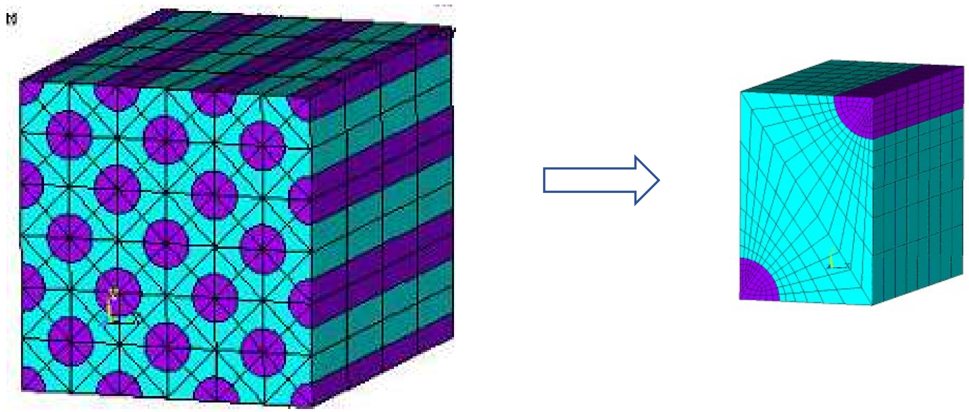
$$E_{22} = \frac{E_w \cdot E_o}{V_w E_o + V_o E_w} = \frac{73{,}5 \cdot 3{,}4}{38{,}5} = 6{,}5\ [GPa]$$

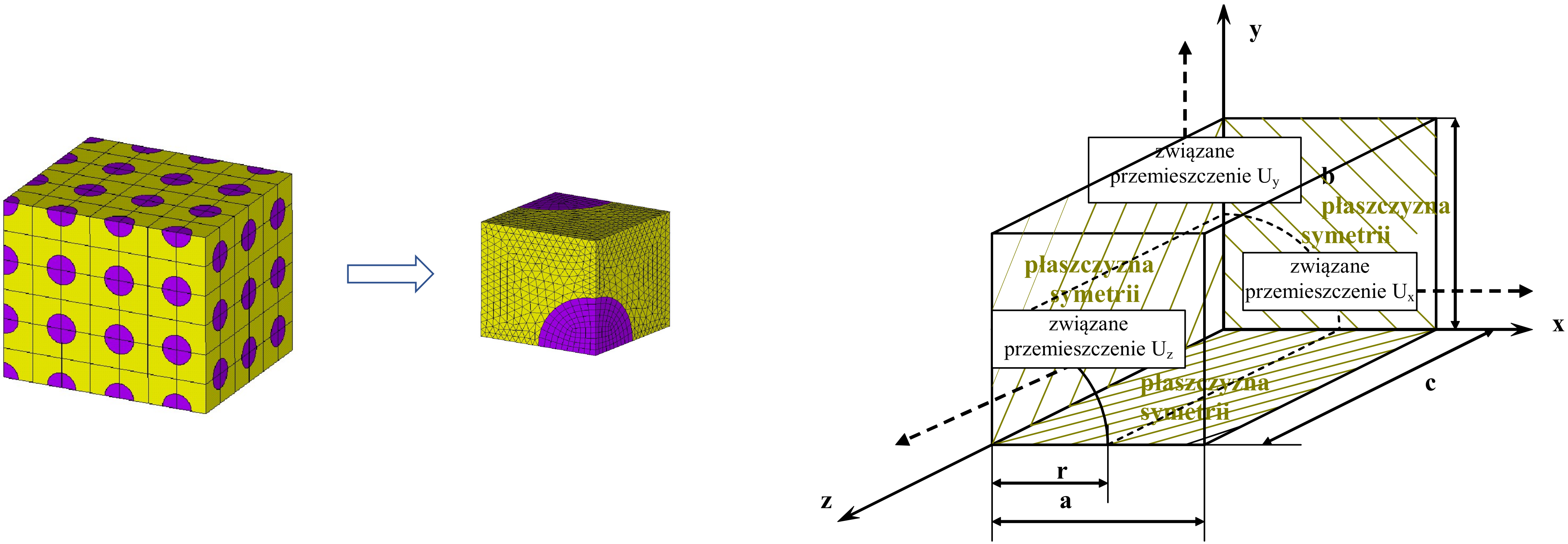
$$\nu_{12} = \nu_w V_w + \nu_o V_o = 0{,}22 \cdot 0{,}5 + 0{,}35 \cdot 0{,}5 = 0{,}185$$

$$G_{12} = \frac{G_w \cdot G_o}{V_w G_o + V_o G_w} = \frac{30 \cdot 1{,}3}{0{,}5 \cdot 30 + 0{,}5 \cdot 1{,}3} = 2{,}5\ [GPa]$$

Wyprowadzone powyżej wzory tylko z pewnym przybliżeniem wyznaczają zastępcze stałe sprężyste kompozytu. Ponadto wzory te można stosować przede wszystkim do kompozytów zbrojonych włóknem szklanym. Włókno węglowe samo w sobie jest anizotropowe, w związku z czym tak proste zależności nie są odpowiednie do wyznaczania zastępczych właściwości kompozytów zbrojonych takim włóknem.

Zastępcze stałe sprężyste dla ośrodków kompozytowych dla bardziej złożonych, niejednorodnych struktur można wyznaczać na drodze bardziej skomplikowanych modeli analitycznych lub obliczeń numerycznych, w szczególności za pomocą metody elementów skończonych. Przeprowadzić trzeba wówczas obliczenia dla obciążenia reprezentatywnego powtarzalnego segmentu struktury (*RVE- representative volume element*) kolejnymi składowymi stanu naprężenia pamiętając o odpowiednich przemieszczeniowych warunkach brzegowych. Element reprezentatywny to możliwie najmniejszy fragment kompozytu, który analizowany przy odpowiednich warunkach brzegowych (obciążenia i podparcia) pozwala na określenie stanów naprężenia w skali mikro a jednocześnie makroskopowych cech mechanicznych kompozytu.

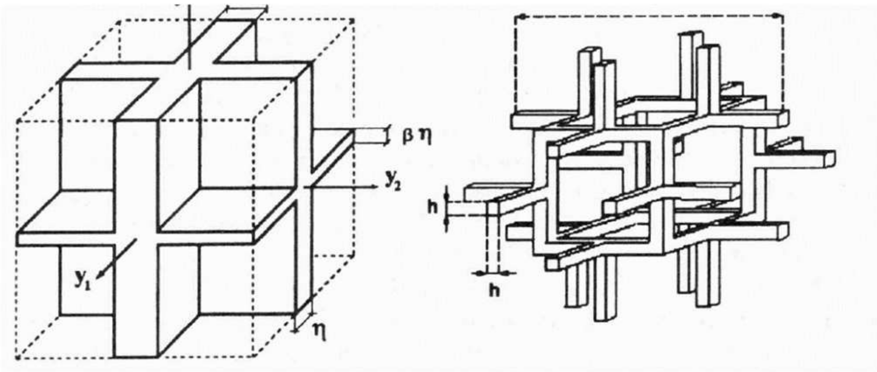




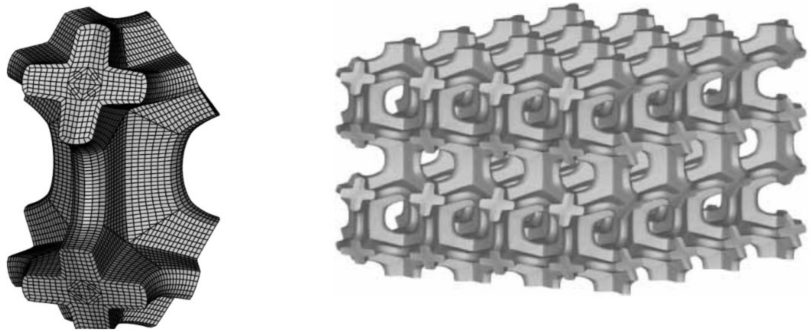
$$\begin{matrix} E_m, \nu_m \\ E_f, \nu_f \end{matrix} \Rightarrow E_{ij}, \nu_{ij}, G_{ij}$$

Powtarzalne segmenty (RVE) typowej struktury kompozytu włóknistego i warunki brzegowe w analizie MES dla wyznaczania właściwości wypadkowych przez obciążanie w trzech kierunkach głównych

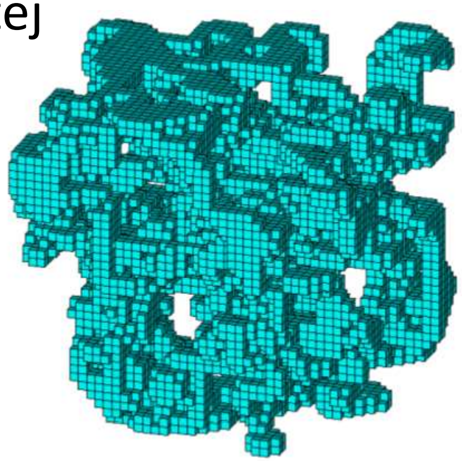
Znając składowe stanu naprężeń jakim poddany jest element oraz otrzymując z obliczeń numerycznych składowe stanu odkształcenia, możemy wyznaczyć elementy macierzy stałych sprężystych: moduły Younga, stałe Poissona i moduły sprężystości poprzecznej.



model do analitycznej homogenizacji periodycznej struktury porowatej



model numeryczny struktury periodycznej



model numeryczny struktury chaotycznej